

## Pratiques algorithmiques dans les mathématiques pré-modernes

Symposium du projet ALGO (ANR-09-BLAN-0300-01),

organisé par Fabio Acerbi (CNRS, UMR 8163 STL) et Marc Moyon (Université de Limoges).

12-14 octobre 2011, Université de Lille 3 (Villeneuve d'Ascq).

DEMONTRER LA CORRECTION D'ALGORITHMES PAR LE BIAIS D'ALGORITHMES EN CHINE ANCIENNE

Karine Chemla

(CNRS, UMR 7219 SPHERE, Paris)

### La nature du texte d'un algorithme dans les sources de la Chine ancienne

*Les Neuf Chapitres sur les Procédures mathématiques*, (Chemla & Guo, Dunod, 2004)

#### Problème 11 du chapitre 5:

« SUPPOSONS QU'ON AIT UNE PYRAMIDE TRONQUEE A BASE CIRCULAIRE DONT LA CIRCONFERENCE DU CERCLE INFERIEUR VAUT 3 ZHANG, LA CIRCONFERENCE DU CERCLE SUPERIEUR 2 ZHANG ET LA HAUTEUR 1 ZHANG. ON DEMANDE COMBIEN VAUT LE VOLUME.

REPOSE : 527 CHI 7/9 CHI.

PROCEDURE : LES CIRCONFERENCES DES CERCLES SUPERIEUR ET INFERIEUR ETANT MULTIPLIEES L'UNE PAR L'AUTRE, PUIS CHACUNE MULTIPLIEE PAR ELLE-MEME, ON SOMME CEUX-CI (LES RESULTATS) ; ON MULTIPLIE CE CI PAR LA HAUTEUR ET ON DIVISE PAR 36.

今有圓亭，下周三丈，上周二丈，高一丈。問積幾何。

荅曰：五百二十七尺九分尺之七。

術曰：上下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。»

#### Chapitre 1

« PARTAGER DIRECTEMENT

PROCEDURE : [1] ON PREND LA QUANTITE (SHU) DE PERSONNES COMME DIVISEUR, [2] LA QUANTITE (SHU) DE SAPEQUES COMME DIVIDENDE. [3] ON EFFECTUE LA DIVISION DU DIVIDENDE PAR LE DIVISEUR. [4] S'IL Y A UN TYPE DE PARTS, ON LES FAIT COMMUNIQUER. [5] S'IL Y A PLUSIEURS TYPES DE PARTS, ON LES EGALISE PUIS ON FAIT COMMUNIQUER.

經分

術曰：以人數爲法，錢數爲實，實如法而一。有分者通之。重有分者同而通之。»

## L'indication des raisons de la correction dans l'énoncé d'un algorithme

### Énoncés d'algorithmes à la structure transparente

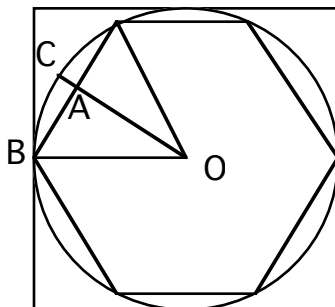


Figure 1: Reconstitution de la figure qui sous-tend le commentaire de Liu Hui relatif au calcul de la circonférence d'un cercle

« Plaçons le diamètre du cercle, 2 *chi* 置圓徑二尺. Si l'on en prend la moitié, cela fait 1 *chi* et donne les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle. 半之爲一尺, 即圓裏觚之面也。

On prend le demi-diamètre, 1 *chi*, comme hypoténuse, la moitié du côté, 5 *cun*, comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. 令半徑一尺爲弦, 半面五寸爲句, 爲之求股。

Le carré (*mi*) de la base (*gou*), 25 *cun*, étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, il reste 75 *cun*. On divise ceci par extraction de la racine carrée, en continuant jusqu'aux *miao*, aux *hu*. Et l'on rétrograde encore une fois le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale (*weishu*) (de la racine). Le chiffre de la partie décimale qui n'a pas de nom [d'unité], on le prend comme numérateur, et on prend 10 comme dénominateur. Cela fait, en simplifiant, 2/5 de *hu*. **Par conséquent** on obtient, la hauteur (*gu*), 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu*, 2/5 de *hu*.

以句幕二十五寸減弦幕, 餘七十五寸。開方除之, 下至秒、忽。又一退法, 求其微數。微數無名知以爲分子, 以十爲分母, 約作五分忽之二。故得股八寸六分六釐二秒五忽五分忽之二。 »

### Comment la prescription d'opérations pointe vers les raisons de la correction d'un algorithme

« Si "les dénominateurs multiplient les numérateurs qui ne leur correspondent pas", c'est pour homogénéiser ces numérateurs. Si "les dénominateurs sont multipliés les uns par les autres", c'est pour égaliser ces dénominateurs. 母互乘子知, 齊其子。母相乘者, 同其母。

A l'aide du dénominateur, "les faire communiquer", c'est multiplier par le dénominateur les parties entières, et incorporer ceux-ci (les résultats) aux numérateurs. En multipliant, on désagrège les parties entières, cela fait alors les parts des produits (*jifen*); les parts des produits (*jifen*) et les numérateurs communiquent alors les unes avec les autres, c'est pourquoi on peut les faire se rejoindre les unes les autres.

以母通之者, 分母乘全內子。乘, 散全則爲積分, 積分則與分子相通, 故可令相從。 »

« Chaque fois que des quantités (*shu*) sont données en relation les unes avec les autres, on les appelle des *lü*. Puisque des *lü* sont donnés les uns en relation avec les autres, ils communiquent. 凡數相與者謂之率。率知, 自相與通。 »

« S'il y a des parts, on peut désagréger; si les parts sont des superpositions réitérées, on simplifie. 有分則可散, 分重疊則約也。 »

« Diviseur et dividende, divisés par le nombre égal, sont des *lü* mis en relation l'un avec l'autre. 等除法實, 相與率也。 »

« Par conséquent, si on désagrège les parts, c'est qu'on fait nécessairement en sorte que les deux dénominateurs multiplient l'un et l'autre diviseur et dividende.  
故散分者，必令兩分母相乘法實也。 »

**Thureau-Dangin 1936, BM 13901:**

« J'ai **additionné** la surface et (le côté de) mon carré : 45'.  
Tu poseras 1°, l'*unité*. Tu **fractionneras** en deux 1° : 30'. Tu **multiplieras** (entre eux) [30'] et 30' : 15'. Tu **ajouteras** 15' à 45' : 1°. 1° est le carré de 1°. 30', que tu as multiplié (avec lui-même), de 1° tu **soustrairas** : 30' est le (côté du) carré. »

**Jens Høyrup, 2002 :**

1. The surface **and** my confrontation: 45' is it. 1, the **projection**,
2. you posit. The **moitié** of 1 you **break**, 30' and 30' you **make hold** each other.
3. 15' to 45' you **append**: by 1, 1 is the equalside. 30' which you have made hold
4. in the inside of 1 you **tear out**: 30' the confrontation”

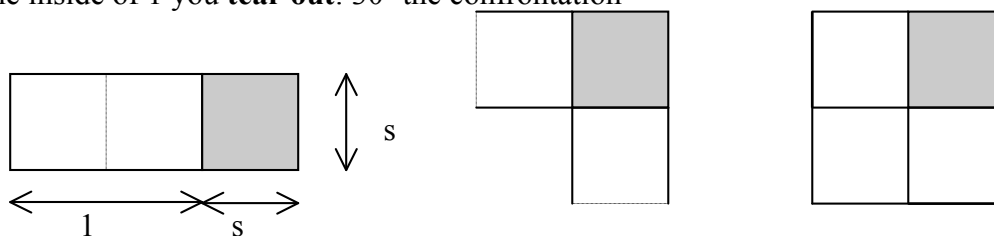


Figure 2: La reconstitution de la suite de figures sous-tendant la correction de l'algorithme (Jens Høyrup)

**Opérer sur le texte d'un algorithme dans le cadre d'une démonstration**

« ON MULTIPLIE, PAR LA QUANTITE (*SHU*) DE CE QUE L'ON A, LE *LÜ* DE CE QU'ON CHERCHE, CE QUI FAIT LE DIVIDENDE. ON PREND LE *LÜ* DE CE QU'ON A COMME DIVISEUR. ET ON EFFECTUE LA DIVISION DU DIVIDENDE PAR LE DIVISEUR. 以所有數乘所求率為實。以所有率為法。實如法而一。 »

« En s'appuyant sur le fait que le *lü* du petit mil est 5 et que le *lü* du grain grossièrement décortiqué est 3, alors de 5 de petit mil, on fait 1, et de 3 de grain grossièrement décortiqué, on fait 1. En effet, si l'on veut transformer du petit mil pour en faire du grain décortiqué, le petit mil doit d'abord prendre pour base cette unité. Qu'il prenne cette unité, c'est ce que signifie le fait qu'on le simplifie par 5 : on fait que 5 devienne 1. Lorsque c'est terminé, alors en multipliant ceci par 3, on fait que 1 devienne 3. S'il en est ainsi, alors, quand les *lü* atteignent à l'unité, on prend 5 pour 3.

據粟率五、糲率三，是粟五而為一，糲米三而為一也。欲化粟為米者，粟當先本是一。一者，謂以五約之，令五而為一也。訖，乃以三乘之，令一而為三。如是，則率至於一，以五為三矣。 »

« Mais si on divise d'abord, puis que l'on multiplie, on aura peut-être des parts de reste. C'est pourquoi la procédure inverse les opérations.  
然先除後乘，或有餘分，故術反之。 »